10.1 Antag en delta-funktionsbump i den oändliga potentialbrunnen

$$H' = \alpha\delta(x - \tfrac{a}{2})$$

a) Bestäm första ordningens korrektioner till den tillåtna energin.

Den ostörda lösningen ges av

$$\psi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Första ordningens korrektion till energin ges då av

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle = \int_0^a \frac{2}{a}\cdot\alpha\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\delta(x - \tfrac{a}{2})\,dx =$$

$$= \frac{2\alpha}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases}\frac{2\alpha}{a} & \text{om } n \text{ udda}\\ 0 & \text{om } n \text{ jämn}\end{cases}$$

De jämna lösningarna störs inte eftersom de är 0 i $x = \frac{a}{2}$ och därför känner de ej av H'.

b) Bestäm de tre första termerna i korrektionen till grundtillståndet.

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{(E_n^0 - E_m^0)}\psi_m^0$$

I detta fall är $n = 1$. Således

$$\langle\psi_m^0|H'|\psi_1^0\rangle = \frac{2\alpha}{a}\int_0^a\delta(x - \tfrac{a}{2})\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{2\alpha}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\alpha}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

Vidare är:

$$E_1^0 - E_m^0 = (1 - m^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Således

$$\psi_1^1 = \frac{2ma^2}{\pi^2\hbar^2}\left(\frac{2\alpha}{a}\right)\left[\frac{1}{1-9}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\psi_3^0 + \frac{1}{1-25}\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\psi_5^0\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-49}\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\psi_7^0 + \ldots\right] = \frac{4ma\alpha}{\pi^2\hbar^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\left[\frac{1}{8}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{48}\sin\left(\frac{7\pi x}{a}\right) + \ldots\right] = \frac{m\cancel{a}\alpha}{\pi^2\hbar^2}\sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \frac{1}{6}\sin\left(\frac{7\pi x}{a}\right) + \ldots\right]$$

6.2 Harmonisk oscillator. Tillåtna energier $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

där $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Nu låt $k \to (1+\varepsilon)k$.

a) Bestäm exakt de nya energierna

Taylorutveckling

$$E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega' = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega\sqrt{1+\varepsilon} \approx (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega\left(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon-\tfrac{1}{8}\varepsilon^2+\dots\right)$$

b) Bestäm första ordningens störning i energin från

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

Måste först bestämma H'

$$-H' = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{1}{2}m\omega'^2 x^2 = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x^2 - \frac{1}{2}m\frac{k(1+\varepsilon)}{m}x^2 = -\frac{1}{2}k\varepsilon x^2$$

$$H' = \frac{1}{2}k\varepsilon x^2 = \varepsilon\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = \varepsilon V(x)$$

Den ostörda potentialen

Således

$$E_n^1 = \langle n|\varepsilon(\tfrac{1}{2}kx^2)|n\rangle = \varepsilon\langle V\rangle$$

Från virialsatsen $\langle V\rangle = \langle T\rangle$ och dessutom $\langle T\rangle + \langle V\rangle = E_n$ får vi $\langle V\rangle = \frac{1}{2}E_n$

Således

$$E_n^1 = \frac{\varepsilon}{2}(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Stämmer med den första termen i a).

6.3 Två svagt växelverkande bosoner i en oändlig potentialbrunn

$$V(x_1,x_2) = -aV_0\delta(x_1-x_2)$$

a) Identiska bosoner

Grundtillståndet: $\psi_1^0(x_1,x_2) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)$, $E_1^0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$

Första exciterade tillståndet:

$$\psi_1'(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right]$$

$$E_1' = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

b) Bestäm effekten av partikel-partikelinteraktionen

$$E_1' = \langle\psi_1^0|H'|\psi_1^0\rangle = -aV_0\langle\psi_1^0|\delta(x_1-x_2)|\psi_1^0\rangle =$$

$$= -aV_0\left(\frac{2}{a}\right)^2\int_0^a\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\delta(x_1-x_2)\,dx_1dx_2 =$$

$$= -\frac{4V_0}{a}\int_0^a \sin^4\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)dx_2 = -\frac{4V_0}{a}\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)dx_2$$

$$= -\frac{4V_0}{a}\int_0^a \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)}{2}dx_2 + \frac{4V_0}{a}\int_0^a \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)dx_2$$

$$= -\frac{4V_0}{a}\cdot\frac{a}{2} + \frac{V_0}{a}\int_0^a \frac{1-\cos\left(\frac{4\pi x_2}{a}\right)}{2}dx_2 = -2V_0 + \frac{V_0}{2} = -\frac{3V_0}{2}$$

$$E_2' = \langle\psi_2^0|H'|\psi_2^0\rangle = -aV_0\cdot\frac{2}{a^2}\int_0^a\int_0^a\left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right)^2\delta(x_1-x_2)$$

$$= -2V_0\int_0^a\left(\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right)^2dx_2$$

$$= -2V_0\int_0^a 4\sin^2\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)dx_2 = -8V_0\int_0^a\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)}{2}\sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)dx$$

$$= -4V_0\int_0^a\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi x_2}{a}\right)}{2}dx_2 + 4V_0\int_0^a\cos\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)dx_2$$

$$= -2V_0 + 4V_0\left[\frac{a}{6\pi}\sin^3\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)\right]_0^a = -2V_0$$

6.4 a) Hitta andra ordningens korrektion till energin för potentialen i 6.1

$$H' = \alpha\,\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Här

$$\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle = \frac{2}{a}\alpha \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\alpha \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{a} & \text{om } m,n \text{ udda } m+n \text{ jämn} \\ -\frac{2\alpha}{a} & \text{om } m,n \text{ udda } m+n \text{ udda} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Från

$$E_n^2 = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

där $E_n^0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ och $E_n^0 - E_m^0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n^2-m^2)$

$$\Rightarrow E_n^2 = \sum_{m\neq n,\text{udda}} \left(\frac{2\alpha}{a}\right)^2 \cdot \frac{2ma^2}{\pi^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2-m^2} \quad (\text{om } n \text{ udda})$$

Notera dock att

$$\frac{1}{n^2-m^2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n}\right)$$

Utför man summan så visar det sig att

$$\sum_{m\neq n,\text{udda}} \frac{1}{n^2-m^2} = \frac{1}{2n}\left(-\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{4n^2}$$

$$\Rightarrow E_n^2 = \begin{cases} 0 & , n \text{ jämn} \\ -2m\left(\frac{\alpha}{\pi\hbar n}\right)^2 & , n \text{ udda} \end{cases}$$

b) Beräkna andra ordningens korrektion för

$$V(x) = \frac{1}{2}k(1+\varepsilon)x^2 \Rightarrow H' = \frac{1}{2}k\varepsilon x^2$$

I allmänhet

$$\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle = \frac{1}{2}k\varepsilon \langle m | \frac{\hbar}{2m\omega}(a_+a_+ + a_+a_- + a_-a_+ + a_-a_-)|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar k\varepsilon}{4m\omega}\Big[\langle m|\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,|n+2\rangle + \langle m|\sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle + (n+1)\langle m|n\rangle$$

$$+ \sqrt{n-1}\sqrt{n}\,\langle m|n-2\rangle\Big] = \left\{\omega = \sqrt{\tfrac{k}{m}}\right\} = \frac{\hbar\omega\varepsilon}{4}\Big[\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\delta_{m,n+2}$$

$$+ (2n+1)\,\delta_{m,n} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\delta_{m,n-2}\Big]$$

Således för $m\neq n$

$$E_n^2 = \sum_{m\neq n} \frac{|\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2}|^2}{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega - (m+\frac{1}{2})\hbar\omega}\left(\frac{\hbar\omega\varepsilon}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\hbar^2\omega^2\varepsilon^2}{16}\sum_{m\neq n} \frac{(n+1)(n+2)\,\delta_{m,n+2} + n(n-1)\,\delta_{m,n-2}}{(n-m)\hbar\omega}$$

$$= \varepsilon^2 \frac{\hbar\omega}{16}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{n-(n+2)} + \frac{n(n-1)}{n-(n-2)}\right] = \varepsilon^2 \frac{\hbar\omega}{16}\left(\frac{-n^2-3n-2}{2} + \frac{n^2-n}{2}\right) =$$

$$= \varepsilon^2 \frac{\hbar\omega}{16} \cdot \frac{-4n-2}{2} = -\varepsilon^2 \frac{\hbar\omega}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Som stämmer med ε^2-termen i den exakta lösningen

6.5 Laddad partikel i endimensionell harmonisk oscillator

$$H' = -qEx$$

a) Visa att det inte är någon förändring till första ordningen

$$\langle \psi_1^0 | H' | \psi_1^0 \rangle = -qE\langle 1|x|1\rangle = -qE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|a^\dagger + a|1\rangle =$$

$$= -qE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|(\sqrt{2}|2\rangle + |0\rangle) = 0$$

$\Rightarrow$ Inget till första ordningen

Till andra ordningen

$$\langle m|H'|n\rangle = -qE\langle m|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)|n\rangle =$$

$$= -qE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle m|(\sqrt{n+1}|n+1\rangle + \sqrt{n}|n-1\rangle) = -qE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1})$$

$$E_n^0 - E_m^0 = (n-m)\hbar\omega$$

$$\Rightarrow E_n^2 = \sum_{m\neq n} \frac{|-qE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1})|^2}{(n-m)\hbar\omega} =$$

$$= \sum_{m\neq n} \frac{q^2E^2\cdot\frac{\hbar}{2m\omega}((n+1)\delta_{m,n+1} + n\,\delta_{m,n-1})}{(n-m)\hbar\omega} =$$

$$= \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}\left[\frac{n+1}{(n-n-1)} + \frac{n}{n-n+1}\right] = -\frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

b) Lös exakt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx\right)\psi = E\psi$$

Skriv nu om

$$\frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 - \frac{2qE}{m\omega^2}x\right) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\underbrace{\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2}_{=x'} - \frac{q^2E^2}{m^2\omega^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\left[x'^2 - \frac{q^2E^2}{m^2\omega^4}\right] = \frac{1}{2}m\omega^2x'^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad E \to E + \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

6.9 Hamiltonianen i matrisform

$$H = V_0 \begin{pmatrix} (1-\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

a) Ostörda fallet

$$H = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: $\lambda_{1,2} = V_0,\ \lambda_3 = 2V_0$

Egenvektorer:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestäm de exakta egen-värdena till H.

Den karaktäristiska ekvationen

$$\begin{vmatrix} V_0(1-\varepsilon)-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & V_0-\lambda & \varepsilon V_0 \\ 0 & \varepsilon V_0 & 2V_0-\lambda \end{vmatrix} = (V_0(1-\varepsilon)-\lambda)(V_0-\lambda)(2V_0-\lambda) - \varepsilon^2 V_0^2 (V_0(1-\varepsilon)-\lambda) =$$

$$= (V_0(1-\varepsilon)-\lambda)(2V_0^2 - 3V_0\lambda + \lambda^2 - \varepsilon^2 V_0^2) = 0$$

$$\lambda_1 = V_0(1-\varepsilon),\quad \lambda_{2,3} = \frac{3}{2}V_0 \pm \sqrt{\frac{9}{4}V_0^2 - 2V_0^2 + \varepsilon^2 V_0^2} = \frac{V_0}{2}\left(3 \pm \sqrt{1+4\varepsilon^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{V_0}{2}\left(3 + \sqrt{1+4\varepsilon^2}\right) \approx \frac{V_0}{2}(3+1+2\varepsilon^2) = V_0(2+\varepsilon^2)$$

$$\lambda_3 = \frac{V_0}{2}\left(3 - \sqrt{1+4\varepsilon^2}\right) \approx \frac{V_0}{2}(3-1-2\varepsilon^2) = V_0(1-\varepsilon^2)$$

c) Använd icke-degenererad störningsräkning för att hitta det approximativa egenvärdet för det icke-degenererade tillståndet (dvs ξ_3)

$$H' = \varepsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3' = \langle \chi_3 | H' | \chi_3 \rangle = \varepsilon V_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon V_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$E_3^2 = \sum_{m=1,2} \frac{|\langle \chi_m | H' | \chi_3 \rangle|}{E_3^0 - E_m^0}$$

$$\langle \chi_1 | H' | \chi_3 \rangle = \varepsilon V_0 (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \chi_2 | H' | \chi_3 \rangle = \varepsilon V_0$$

$$E_3^0 - E_2^0 = 2V_0 - V_0 = V_0 \quad , \quad E_3^2 = \frac{(\varepsilon V_0)^2}{V_0} = \varepsilon^2 V_0$$

Alltså är

$$E_3 = E_3^0 + E_3^1 + E_3^2 = 2V_0 + 0 + \varepsilon^2 V_0 = V_0(2+\varepsilon^2)$$

d) Använd degenererad störningsräkning för att hitta första ordningens korrektion till de två egenvärdena som är degenererade initialt.

$$W_{aa} = \langle \chi_1 | H' | \chi_1 \rangle = \varepsilon V_0 (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon V_0 (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon V_0$$

$$W_{ab} = \varepsilon V_0 (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$W_{bb} = \varepsilon V_0 (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Vi får då:

$$E_\pm^1 = \frac{1}{2}\left[-\varepsilon V_0 + 0 \pm \sqrt{\varepsilon^2 V_0^2 + 0}\,\right] = \frac{1}{2}(-\varepsilon V_0 \pm \varepsilon V_0) = \{0, -\varepsilon V_0\}$$

Till första ordningen: $E_1 = V_0 - \varepsilon V_0$, $E_2 = V_0$